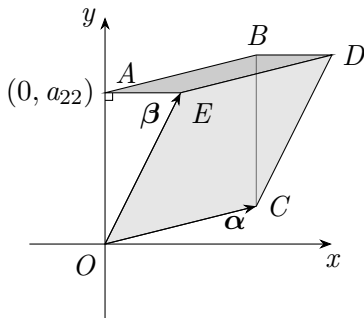


2.1. 行列式的定义

平行四边形的面积

以平面向量 $\alpha = (a_{11}, a_{12})$ 和 $\beta = (a_{21}, a_{22})$ 为邻边的平行四边形的面积是多少？



$$S_{\square OEDC} + S_{\square ABDE} = S_{\square OACB}$$

分别以 OC, ED 为底边, $\square OACB$ 的高为 $\square OEDC$ 在 OC 上的高和 $\square ABDE$ 在 ED 上的高的和。

因此

$$S_{\square OEDC} = S_{\square OABC} - S_{\square ABDE}$$

在 $\square OABC$ 中, 以 AO 为底, 则对应的高为 C 的横坐标, 即 a_{11} , 因此

$$S_{\square OABC} = |OA| \cdot a_{11} = a_{22} a_{11} = a_{11} a_{22}$$

在 $\square ABDE$ 中, 以 AE 为底, 则对应的高为 D, E 的纵坐标之差, 即 α 的纵坐标 a_{12} , 因此

$$S_{\square ABDE} = |AE| \cdot a_{12} = a_{21} a_{12} = a_{12} a_{21}$$

所以

$$S_{\square OEDC} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

我们定义

$$V(\alpha, \beta) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

注意到

$$V(\alpha, \beta) = -V(\beta, \alpha)$$

因此 $V(\alpha, \beta)$ 不总非负，但可以验证对所有的情形，平面向量 α, β 形成的平行四边形面积为 $V(\alpha, \beta)$ 的绝对值。

例

计算由 $\alpha = (1, 2), \beta = (3, 4)$ 形成的平行四边形的面积。

$V(\alpha, \beta)$ 的基本性质如下:

- ① $V(\lambda\alpha, \beta) = V(\alpha, \lambda\beta) = \lambda V(\alpha, \beta), \forall \lambda \in \mathbb{R};$
- ② $V(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = V(\alpha_1, \beta) + V(\alpha_2, \beta);$
- ③ $V(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = V(\alpha, \beta_1) + V(\alpha, \beta_2);$
- ④ $V(\alpha, \alpha) = 0;$
- ⑤ 当 $\alpha = (1, 0), \beta = (0, 1)$ 时, $V(\alpha, \beta) = 1.$

对就的直观解释:

- ① 其中一个向量变为原来的 λ 倍, 它们形成的平行四边形的“带符号的面积”也变为原来的 λ 倍;
- ② β 不变, α 为两个向量 α_1, α_2 的和, 那么 α 为邻边的平行四边形在底边 β 上的“带符号的高”为分别以 α_1 为邻边的平行四边形, 以 α_2 为邻边的平行四边形在底边 β 上的“带符号的高”的和, 从而“带符号的面积” $V(\alpha, \beta)$ 也是 $V(\alpha_1, \beta)$ 与 $V(\alpha_2, \beta)$ 的和;
- ③ 与 (2) 类似, α 不变, β 为两个向量 β_1, β_2 的和, 那么“带符号的面积” $V(\alpha, \beta)$ 是 $V(\alpha, \beta_1)$ 与 $V(\alpha, \beta_2)$ 的和;
- ④ 如果两个向量相等, 那么以它们为邻边的平行四边形的面积为零;
- ⑤ x 轴和 y 轴的单位向量形成的平行四边形的“带符号的面积”为 1.

问题

对于三个空间向量 α, β, γ , 我们是否可以类似的定义其“带符号的体积” $V(\alpha, \beta, \gamma)$ 呢?

实际上, 对所有正整数 n , 以及由 n 个 $\mathbb{R}^n$ 中的“向量”

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

每个向量都有 n 个坐标, 即对每个 $i = 1, 2, \dots, n$

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

我们都可以定义 $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 使得它满足与上面提到的性质类似的性质。

我们希望 $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 满足如下性质:

(1) (多重线性) 对任意 $i = 1, 2, \dots, n, \lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_i, \dots, \alpha_n) = \lambda V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n);$$

对任意 $i = 1, 2, \dots, n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\begin{aligned} & V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i + \beta, \dots, \alpha_n) \\ &= V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) + V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

(2) (反对称性) 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ 中有两个向量相同, 那么

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0.$$

(3) (规范性) $V(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$, 对 $i = 1, 2, \dots, n$, 有

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T,$$

其中 1 在第 i 个位置.

有趣的是, 如果 $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 满足上述性质, 交换其中两个向量的位置, 它将改变符号, 实际上, 假设 $\alpha_i = \alpha_j$, 且 $i < j$, 则

$$\begin{aligned} 0 &= V(\dots, \alpha_i + \alpha_j, \dots, \alpha_i + \alpha_j, \dots) \\ &= V(\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_i, \dots) + V(\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots) \\ &\quad + V(\dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots) + V(\dots, \alpha_j, \dots, \alpha_j, \dots) \\ &= V(\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots) + V(\dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots), \end{aligned}$$

从而有

$$V(\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots) = -V(\dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots).$$

由于每个向量 α_i 都可以写成

$$\alpha_i = a_{i1} \mathbf{e}_1 + a_{i2} \mathbf{e}_2 + \cdots + a_{in} \mathbf{e}_n = \sum_{k=1}^n a_{ik} \mathbf{e}_k$$

根据多重线性和反对称性, 可以得到

$$\begin{aligned} V(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) &= V\left(\sum_{i_1=1}^n a_{1i_1} \mathbf{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{2i_2} \mathbf{e}_{i_2}, \cdots, \sum_{i_n=1}^n a_{ni_n} \mathbf{e}_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n=1}^n V(a_{1i_1} \mathbf{e}_{i_1}, a_{2i_2} \mathbf{e}_{i_2}, \cdots, a_{ni_n} \mathbf{e}_{i_n}) \\ &= \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n=1}^n a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} V(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \cdots, \mathbf{e}_{i_n}) \\ &= \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n \text{ 互不相同}} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} V(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \cdots, \mathbf{e}_{i_n}). \end{aligned}$$

因此我们需要确定

$$V(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n})$$

其中 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 互不相同, 从而为 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列。由于交换两个向量的位置会改变 V 的符号, 因此, 如果排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 经过 m 次交换才能变成 $12 \dots n$, 则

$$V(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) = (-1)^m V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = (-1)^m$$

问题

$1, 2, \dots, n$ 的一个排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 经过多少次交换才能变成 $12 \dots n$ 呢? 特别的, 是奇数次还是偶数次呢?

例

在排列 451263 中，可通过如下操作

- 将 1 依次与它前面比它大的 4, 5 交换，得到 145263;
- 将 2 依次与它前面比它大的 4, 5 交换，得到 124563;
- 将 3 依次与它前面比它大的 4, 5, 6 交换，得到 123456.

共进行了 $2 + 2 + 3 = 7$ 次交换，因此

$$V(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_3) = (-1)^7 = -1$$

一般地, 对于 $1, 2, \dots, n$ 的排列 σ , 假设排列中 i 前面比 i 大的数的个数为 m_i , 记

$$m_\sigma = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

则排列 σ 可经过 m_σ 次对换变为 $12 \cdots n$:

- 将 1 与其前面比 1 大的数依次交换, 对过 m_1 次对换;
- 将 2 与其前面比 2 大的数依次交换, 对过 m_2 次交换;
-

m_σ 称为排列 σ 的逆序数, 例

如: $m_{451263} = 2 + 2 + 3 + 0 + 0 + 0 = 7$

定理

若排列 σ 经过 m 次交换变为 $12 \cdots n$, 则 m 与 m_σ 奇偶性相同。

因此, 满足多重线性、反对称性和规范性的 V 必为

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \sum_{\text{排列 } i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{m_{i_1 i_2 \cdots i_n}} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

其中

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), i = 1, 2, \cdots, n$$

备注

可以验证这个 V 的确满足多重线性、反对称性和规范性!

例

对于 $\alpha_1 = (1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (-2, 1, 2)$, $\alpha_3 = (4, 7, 9)$. 计算 $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1)$, 计算这个三个向量形成的平行六面体的体积。

对 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$, 我们称

$$\sum_{\text{排列 } i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{m_{i_1 i_2 \cdots i_n}} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

为 $\mathbf{A}$ 的行列式, 记为 $\det(\mathbf{A})$ 或 $|\mathbf{A}|$.

备注

如果记 α_i 为 $\mathbf{A}$ 的第 i 行, 则 $\det(\mathbf{A}) = V(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$.

例

1, 2 只有两个排列, 偶排列为 12, 奇排列为 21, 因此二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

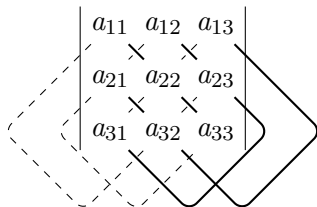
1, 2, 3 的排列中偶排列有 123, 231, 312, 奇排列有 132, 213, 321, 因此三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的值为

$$\begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

用下图来记忆 (实线对应的项符号为正, 虚线对应的项符号为负)



假设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

利用上面的方法，我们得到

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= 3 \times 0 \times 4 + 2 \times 5 \times 2 + (-1) \times 1 \times (-3) \\ &\quad - 3 \times 5 \times (-3) - 2 \times 1 \times 4 - (-1) \times 0 \times 2 \\ &= 0 + 20 + 3 - (-45) - 8 - 0 = 60. \end{aligned}$$

$\mathbf{A}$ 的转置矩阵为

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

经过简单计算可以发现 $|\mathbf{A}^T|$ 也等于 60. 这并非偶然, 实际上, 任何方阵都与其转置矩阵有同样的行列式。

命题

方阵 $\mathbf{A}$ 与其转置矩阵 $\mathbf{A}^T$ 行列式相同。

例

求下三角矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式。